ÜBER DEN

SCHWERPUNKT DER GEMEINSCHAFTLICHEN PUNKTE

ZWEIER

ALGEBRAISCHER KURVEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

BENEDIKT SPORER
PROFESSORATSVERWESER AN DER REALANSTALT HEILBRONN

TÜBINGEN, 1896
VERLAG VON FRANZ FUES.

ÜBER DEN

SCHWERPUNKT DER GEMEINSCHAFTLICHEN PUNKTE

ZWEIER

ALGEBRAISCHER KURVEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

BENEDIKT SPORER
PROFESSORATSVERWESER AN DER REALANSTALT HEILBRONN

TÜBINGEN, 1896
VERLAG VON FRANZ FUES.

Angenommen von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen am 24. Februar 1896.

DRUCK VON H. LAUPP JR IN TÜBINGEN

I. Teil.

Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte.

§ 1.

Kegelschnitte durch vier Punkte.

Sind irgend vier Punkte a b c d gegeben, so liegen die Mitten der sechs Seiten des Vierecks auf einem Kegelschnitt M^2 und dieser Kegelschnitt M^2 ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte durch diese vier Punkte; derselbe geht ausserdem noch durch die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare des Vierecks a b c d [1]). Die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten dieses Vierecks schneiden sich ferner in einem Punkte s, und dieser Punkt s ist zudem die Mitte dieser Verbindungslinien; er ist also notwendig Mittelpunkt des Kegelschnitts M^2, da nur im Mittelpunkt eines solchen mehr als eine Sehne desselben ihre Mitte haben kann. Dieser Punkt s ist weiter Schwerpunkt der vier Punkte a b c d.

Liegen die vier Punkte a b c d auf einem Kreise, so haben alle durch sie gehende Kegelschnitte parallele Axen, und zwar sind dieselben parallel den Axen der beiden durch die vier Punkte gehenden Parabeln, und die Axen dieser sind also senkrecht auf einander [2]). Der obige Kegelschnitt M^2 geht aber auch durch die unendlich fernen Punkte dieser Parabeln, indem diese ebenfalls als Mittelpunkte einzelner Kegelschnitte durch die vier Punkte a b c d aufzufassen sind. Liegen demnach diese vier Punkte auf einem Kreise, so ist der Kegelschnitt M^2 eine gleichzeitige Hyperbel, deren Asymptoten parallel den Axen der Kegel-

1) Steiner-Schröter, Kegelschnitte. 2. Aufl. p. 304 u. f.
2) Ebd. p. 229.

schnitte des Büschels sind, und da zu den Kegelschnitten dieses Büschels auch der Kreis durch die vier Punkte selbst gehört, so geht diese Hyperbel M^2 auch durch den Mittelpunkt dieses Kreises.

§ 2.

Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte, die konzentrische Kreise auf einen Kegelschnitt mit festen Asymptoten bestimmen.

Es sei ein Kegelschnitt C^2 und irgend eine Gerade G gegeben. Ziehen wir durch irgend einen Punkt c dieser Geraden diejenige Sehne d e des Kegelschnitts, die den Punkt c zur Mitte hat, so ist der Ort dieser Sehne eine Parabel G^2, welche die Gerade G sowie die Asymptoten des Kegelschnitts C^2 berührt[1]). Ziehen wir ferner durch irgend einen Punkt m einen Strahl, der G in g trifft, und errichten auf diesem Strahl m g in g eine Senkrechte, so ist der Ort dieser Senkrechten g h ebenfalls eine Parabel, die G gleichfalls zur Tangente hat. Diese beiden Parabeln haben ausser der Geraden G und der unendlich fernen Geraden noch zwei weitere Tangenten gemein, und eine jede dieser gemeinsamen Tangenten a b ist zugleich Sehne d e des Kegelschnitts C^2, hat also ihre Mitte auf G, und auch Gerade g h, d. h. das Lot auf ihr in ihrem Schnitte mit G geht durch m. Beschreiben wir also um m einen Kreis M^2, der durch den einen Endpunkt a dieser Sehne geht, so geht dieser notwendig auch durch den zweiten Endpunkt b derselben und wir erhalten den Satz:

„Beschreibt man um einen festen Punkt m mit beliebigen Halbmessern Kreise M^2, so bestimmt jeder dieser Kreise mit dem Kegelschnitt vier Punkte, und der Ort der Mitten der sechs Seiten des Vierecks dieser Punkte ist eine gleichzeitige Hyperbel H^2, die sowohl durch den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise, als auch durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, sowie durch die Fusspunkte der vier von m auf den Kegelschnitt gefällten Normalen geht, indem auch diese Fusspunkte als Mitten von Seiten solcher Vierecke aufzufassen sind. Ebenso geht derselbe durch

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. Aufl. I. Bd. p. 168.

die Schnittpunkte von je zwei Gegenseiten der Vierecke, und die Asymptoten derselben sind den Axen des gegebenen Kegelschnitts parallel".

Und da weiter der Mittelpunkt des Kegelschnitts H^2 zugleich Schwerpunkt der vier Ecken jedes einzelnen der obigen Vierecke ist, so finden wir weiter:

„Die vier Punkte, die ein Kreis mit festem Mittelpunkt, aber veränderlichem Halbmesser auf einem festen Kegelschnitt ausschneidet, haben einen festen Punkt zum Schwerpunkt."

Da ferner die Parabel G^2 sich nicht ändert, wenn wir den Kegelschnitt durch einen andern ersetzen, der mit ihm die Asymptoten gemein hat, so erhalten wir noch:

„Dieser Schwerpunkt bleibt derselbe, wenn man den Kegelschnitt durch einen andern ersetzt, der mit ihm die Asymptoten gemein hat, oder aber, wenn man ihn durch die Asymptoten selbst ersetzt."

§ 3.

Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte mit festen Asymptoten.

1. Bewegt sich eine gerade H so, dass ein Kegelschnitt C^2 auf ihr eine Sehne ausschneidet, die ihre Mitte g auf einen Geraden G hat, so umhüllt diese Gerade eine Parabel G^2, welche ausser der Geraden G noch die Asymptoten des Kegelschnitts berührt (§ 2). Lassen wir ebenso eine zweite Gerade H_1 sich derart bewegen, dass ein zweiter Kegelschnitt C_1^2 auf ihr eine Sehne ausschneidet, deren Mitte g_1 auf derselben Geraden G liegt, so umhüllt auch diese Gerade eine Parabel G_1^2, die G und die Asymptoten von C_1^2 berührt. Diese beiden Parabeln G^2 und G_1^2 haben nun, ausser der unendlich fernen Geraden und der Geraden G, noch zwei weitere Tangenten gemein, und jeder solchen Tangente entspricht eine Gerade, auf der die beiden Kegelschnitte sowohl, als auch die Asymptoten derselben Abschnitte ausschneiden, welche dieselbe Mitte haben [1]); oder

1) Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, sind also die Asymptoten derselben imaginär, so schneiden dieselben doch auf einer Geraden eine Sehne mit reeller Mitte aus.

„Sollen zwei Kegelschnitte oder deren Asymptoten auf einer Geraden zwei Sehnen ausschneiden, welche dieselbe Mitte haben, so ist der Ort dieser Mitte ein Kegelschnitt H^2.“

2. Legen wir durch irgend einen Punkt a einer solchen Sehne zwei Kegelschnitte, welche mit den gegebenen Kegelschnitten die Asymptoten gemein haben, so müssen sich diese Kegelschnitte noch in einem zweiten Punkt dieser Geraden schneiden und wir schliessen daraus:

„Haben zwei veränderliche Kegelschnitte C^2 und C_1^2 feste Asymptoten, so hat jeder Kegelschnitt C^2 mit irgend einem Kegelschnitt C_1^2 vier Punkte gemein, und der Ort der Mitten der Seiten des Vierecks dieser Punkte ist ein Kegelschnitt H^2. Da der Mittelpunkt s dieses Ortskegelschnitts der Schwerpunkt von je vier Ecken eines solchen Vierecks ist, so haben also die vier Schnittpunkte einen festen Punkt zum Schwerpunkt, und zwar ist, da wir die Asymptoten der Kegelschnitte C^2 und C_1^2 ebenfalls als Kegelschnitte C^2 und C_1^2 ansehen dürfen, der Punkt s auch Schwerpunkt derjenigen Punkte, welche die Asymptoten der Kegelschnitte C^2 mit denen der Kegelschnitte C_1^2 gemein haben. Soll also der Schwerpunkt der vier Punkte bestimmt werden, in denen zwei Kegelschnitte sich schneiden, so können diese durch ihre Asymptoten ersetzt werden“.

3. Alle diese Veränderungen, die mit einem der Kegelschnitte C^2 oder C_1^2 vorgenommen werden dürfen, stützen sich auf die Unveränderlichkeit der beiden Parabeln G^2 und G_1^2. Ist einer der Kegelschnitte eine Parabel, etwa C^2, so ändert sich die zugehörige Parabel G^2 nicht, wenn wir anstatt der Parabel C^2 eine andere wählen, die zu ihr kongruent ist, und deren Axe mit der von C^2 zusammenfällt und gleichgerichtet ist, oder:

„Ist insbesondere der eine Kegelschnitt eine Parabel, so tritt an Stelle des einen Büschels von Kegelschnitten mit festen Asymptoten ein System kongruenter Parabeln, mit fester gleichgerichteter Axe.“

§ 4.

In die Parabel einbeschriebene Dreiecke mit festem Schwerpunkt.

1. Die obigen Betrachtungen werden hinfällig, sobald die beiden Kegelschnitte C^2 und C_1^2 (§ 3) eine parallele Asymptote

besitzen, indem dann der Schwerpunkt der vier gemeinschaftlichen Punkte beider Kegelschnitte ins Unendliche hinausrückt, so dass wir überhaupt nicht mehr von einem Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kurven reden können. Man könnte vermuten, dass alsdann die übrigen Schnittpunkte beider Kurven, abgesehen von dem unendlich fernen, einen festen Schwerpunkt besitzen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Ist dagegen der eine Kegelschnitt eine Parabel C_1^2 und ist eine Asymptote des Kegelschnitts C_1^2 parallel der Parabelaxe, so bestimmt jeder Kegelschnitt C_1^2, der dieselben Asymptoten beibehält, auf der Parabel, die hier jedoch fest bleiben muss, drei Punkte im Endlichen, die einen festen Punkt zum Schwerpunkt haben. Schneidet nämlich irgend ein Kegelschnitt C_1^2 die Parabel C^2 in den Punkten x, y, z, so umhüllen die Seiten des Dreiecks x y z einen Kegelschnitt P^2, indem durch jeden Punkt der Parabel C^2 nur zwei solche Seiten gehen [1]). Dieser Kegelschnitt P^2 berührt zudem die unendlich ferne Gerade, indem auch diese doppelt gezählt als Kegelschnitt C_1^2 aufzufassen ist, d. h. P^2 ist eine Parabel und die Umkreise aller Dreiecke x y z gehen also durch einen festen Punkt p_0, dem Brennpunkt der Parabel P^2. Soll ferner an diese Ortsparabel eine Tangente parallel einer gegebenen Geraden G gezogen werden, so haben wir nur den Abschnitt a b auf G zwischen den festen Asymptoten der Kegelschnitte C^2 zu halbieren und den Halbierungspunkt mit dem Mittelpunkt o dieser Kegelschnitte zu verbinden. Die gesuchte Tangente geht dann immer durch den Schnittpunkt c dieser Verbindungslinie mit dem Parabeldurchmesser, der der Richtung der gesuchten Tangente konjugiert ist. Diese Konstruktion zeigt uns aber, wenn wir die Gerade parallel der Parabelaxe (von C^2) nehmen, dass die Tangente dann auf die Gerade G_∞ fällt, oder dass die beiden Parabeln P^2 und C^2 parallele Axen haben; und wir erhalten

„Alle Kegelschnitte eines Büschels, von denen eine Asymtote parallel der Axe einer unveränderlichen Parabel ist, und in dem alle Kegelschnitte dieselben Asymptoten besitzen, schneiden die Parabel noch im Endlichen in den Ecken von Drei-

1) Vergl. Steiner-Schröter, Kegelschnitte p. 242.

ecken x y z, die alle einer zweiten Parabel mit gleicher Axenrichtung umschrieben sind."

2. Schneiden die Asymptoten der obigen Kegelschnitte C_1^2 die Parabel noch in den Punkten x_0 y_0 und z_0 und legen wir durch diese Punkte einen Kreis K^2, so hat derselbe mit der Parabel C^2 noch einen vierten Punkt p gemein. Ziehen wir weiter durch den Mittelpunkt m_0 dieses Kreises eine Senkrechte zur Parabelaxe und beschreiben um die Punkte dieser Senkrechten Kreise durch p, so haben diese Kreise mit der Parabel C^2 noch je drei Punkte u v w gemein und die Seiten der Dreiecke u v w umhüllen ebenfalls eine Parabel P_1^2, indem auch hier durch jeden Punkt von C^2 nur zwei Seiten von Dreiecken u v w gehen und auch die Gerade G_∞ zu einer solchen Seite wird. Auch an diese Parabel können wir eine Tangente von gegebener Richtung durch Benützung des Umstandes ziehen, dass die Geraden p u und v w, als Gegenseiten eines der Parabel C^2 einbeschriebenen Kreisvierecks, mit der Axe derselben gleiche Winkel bilden. Wir erhalten aus der Richtung der Geraden v w zunächst die Gerade p u und dadurch dann den Mittelpunkt des Kreises K^2, der zu diesem Punkt gehört und damit die gesuchte Tangente selbst. Auch diese Konstruktion zeigt uns, dass die Ortsparabel P_1^2 mit C^2 parallele Axen haben. Die Parabeln P^2 und P_1^2 berühren aber beide die Seiten des Dreiecks $x_0 y_0 z_0$ und haben parallele Axen, d. h. sie fallen zusammen. Alle Kreise K^2 haben weiter ausser dem Punkt p noch einen zweiten Punkt p_0 gemein und von diesen beiden Punkten muss notwendig einer Brennpunkt der Parabel P^2 sein, da jeder einem beliebigen Tangentendreieck der Parabel umschriebene Kreis durch den Brennpunkt derselben geht. Der Punkt p kann es aber nicht sein, da durch ihn zwei eigentliche Tangenten der Parabel gehen, die Seiten eines Dreiecks u v w sind, das dem Kreise K^2 angehört, der die Parabel in p berührt; d. h. es ist der Punkt p_0 der Brennpunkt der Parabel und wir haben also:

„Alle den obigen Dreiecken x y z, welche die Kegelschnitte C_1^2 auf der festen Parabel C^2 bestimmen, umschriebene Kreise, gehen noch durch zwei feste Punkte p und p_0, von denen der eine p_0 Brennpunkt der von den Seiten dieser Dreiecke umhüllten Parabel P^2 und der Punkt p ein bestimmter Punkt auf der

Parabel C^2 ist, nämlich der Punkt, in dem der durch die Schnitte $x_0\, y_0\, z_0$ der festen Asymptoten der Kegelschnitte ${C_1}^2$ mit der Parabel im Endlichen, gelegte Kreis die Parabel noch durchschneidet. Die Mittelpunkte aller Umkreise dieser Dreiecke x y z liegen zudem noch auf einer Senkrechten zur Axe von C^2.

3. Wie wir weiter unten sehen werden, bestimmen aber alle Kreise, die wir um beliebige Punkte einer Senkrechten zur Axe einer Parabel mit beliebigem Halbmesser beschreiben können, auf der Parabel je vier Punkte, die einen festen auf der Parabelaxe gelegenen Punkt zum Schwerpunkt haben (vergl. § 5, 6). Da die Kreise K^2 ausserdem noch durch einen festen Punkt z der Parabel C^2 gehen, so müssen also die Ecken der Dreiecke x y z einen festen Punkt zum Schwerpunkt haben, oder

„Haben die Kegelschnitte eines Büschels feste Asymtoten, und ist eine derselben parallel mit der Axe einer festen Parabel, so schneidet jeder der Kegelschnitte die Parabel noch in den Ecken eines Dreiecks (im Endlichen), das einen festen Punkt zum Schwerpunkt hat".

Anwendungen.

§ 5.

Ueber den Ort des Schwerpunktes der gemeinschaftlichen Punkte eines Kreises und eines Kegelschnitts, wenn der Kreismittelpunkt sich auf einer Geraden bewegt.

1. Ziehen wir zu irgend einer Geraden M senkrechte Sehnen eines Kegelschnitts C^2, so liegen deren Mitten auf einer Geraden D, die Durchmesser des Kegelschnitts ist und es giebt also im Allgemeinen immer eine solche Sehne a b des Kegelschnitts, die ihre Mitte auf M hat und die zu M senkrecht ist, nämlich diejenige der obigen Sehnen, die durch den Schnittpunkt von D und M geht. Durch die Endpunkte a b dieser Sehne ist dann immer ein Büschel von Kreisen bestimmt, die alle durch die Punkte a und b gehen und die ihre Mittelpunkte auf M haben. Diese Kreise bestimmen auf dem Kegelschnitt C^2 noch je zwei weitere Punkte c und d und die Verbindungslinien dieser Punkte c d sind alle unter sich parallel, indem sie mit a b Gegenseitenpaare von Kreisvierecken bilden, die dem Kegelschnitt C^2 einbeschrieben sind, also mit den Axen derselben gleiche Winkel bilden [1]). Die Mitten g aller dieser Sehnen c d liegen somit auf einem zweiten Durchmesser D_1 des Kegelschnitts. Soll ferner der Schwerpunkt von irgend vier Punkten, die ein Kreis durch a und b mit dem Kegelschnitt C^2 gemein hat, bestimmt werden, so haben wir nur die Verbindungslinie des Halbierungspunktes g der zum Kreis gehörigen Sehne c d mit der Mitte m_0 von a b zu halbieren, der Halbierungspunkt s, ist dann der zum Kreismittelpunkt m gehörige Schwerpunkt. Der Ort der Schwerpunkte s, die zu allen möglichen Kreisen

1) Steiner-Schröter, Kegelschnitte p. 311.

des obigen Büschels gehören, ist also eine Parallele zu D_1. Ersetzen wir jeden Kreis des Büschels durch das Büschel zu ihm konzentrischer Kreise, so erhalten wir:

„Beschreiben wir um beliebige Punkte m einer Geraden M mit beliebigen Halbmessern Kreise, so haben diese Kreise mit einem festen Kegelschnitt C^2 je vier Punkte gemein, und der Ort des Schwerpunkts von je vier solchen Punkten ist eine Gerade S. Die Richtung dieser Geraden ist die eines Durchmessers des Kegelschnitts, dessen konjugierter mit den Axen desselben die gleichen Winkel bildet wie eine Senkrechte zu M, dieser Senkrechten aber nicht parallel ist."

2. Bilden irgend zwei zu einander konjugierte Durchmesser eines Kegelschnitts mit den Halbaxen a_1 und b_1 mit der Hauptaxe die Winkel α und α_1, so ist immer $\text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha_1 = -\frac{b_1^2}{a_1^2}$ [1]). Bezeichnen wir also den Winkel, den die Gerade M mit der Hauptaxe bildet mit α und den Winkel der Geraden S mit dieser Axe mit β, so finden wir, dass die Gerade a b mit dieser Axe einen Winkel gleich $90 + \alpha$ und die Geraden c d mit derselben Winkel gleich $90 - \alpha$ bilden, und dass also:

$$\text{tang } (90 - \alpha) . \text{ tang } \beta = -\frac{b_1^2}{a_1^2}, \text{ oder}$$

$$\text{tang } \beta = -\frac{b_1^2}{a_1^2} \text{ tang } \alpha$$

ist. Hieraus und aus Obigem finden wir wieder:

„Zu parallelen Geraden M gehören parallele Geraden S und ist insbesondere die Gerade M parallel zu einer Axe, so ist dies auch mit der zugehörigen Geraden S der Fall."

„Geht ferner die Gerade M durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, so geht auch die Gerade S durch denselben und fällt die Gerade M auf eine Asymptote des Kegelschnitts, so bildet die Gerade S mit der Nebenaxe dieselben Winkel, wie die Asymptote mit der Hauptaxe. Fällt dagegen die Gerade S auf eine Asymptote, so bildet die Gerade M mit der Hauptaxe einen Winkel, dessen Tangente gleich dem Kubus der Tangente des Winkels der Asymptote mit dieser Axe ist."

---

1) Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, 4. Aufl. p. 239.

3. Ist die Gerade M insbesondere Normale des Kegelschnitts C^2, so können wir von der zugehörigen Ortsgeraden S zwei Punkte leicht konstruieren. Unter den Kreisen, die ihre Mittelpunkte auf der Geraden M haben sind nämlich zwei solche, die den Kegelschnitt C^2 doppelt berühren und zwar sind die Mittelpunkte dieser Kreise die Schnittpunkte der Geraden M mit den Axen des Kegelschnitts C^2 und die zu diesen Punkten m als Kreismittelpunkte gehörigen Punkte s sind die Fusspunkte der Lote vom Normalenfusspunkt m_0 auf diese Axen. Sind c und d die Schnittpunkte der Normale mit den Axen, so können wir nämlich anstatt dass wir um diese Punkte mit beliebigem Halbmesser Kreise beschreiben diejenigen wählen, welche den Kegelschnitt doppelt berühren, und erhalten als Schwerpunkte der vier Punkte, die jeder dieser Kreise mit dem Kegelschnitt gemein hat, die Fusspunkte g wie h der Lote von m_0 auf die Axen. Die Verbindungslinie dieser Fusspunkte ist dann die Gerade S.

Da wir weiter den Kegelschnitt C^2 durch einen zweiten ersetzen dürfen, der mit ihm die Asymptoten gemein hat, und der Punkt m_0 (in 1) als Berührungspunkt eines solchen Kegelschnitts C^2 mit der Geraden a b aufzufassen ist, so finden wir, dass wir die zur Geraden M gehörige Gerade S z. B. auch erhalten, wenn wir von m_0 auf die Axen des Kegelschnittes die Lote fällen und deren Fusspunkte mit einander verbinden. Das gleiche Resultat erhalten wir auch direkt aus den Kreisen durch a und b, die ihre Mittelpunkte auf den Axen von C^2 haben.

4. Soll der zu einem Punkte m, der in Bezug auf die Punkte, die ein Kreis um m mit einem festen Kegelschnitt gemein hat, gehörige Schwerpunkt s konstruiert werden, so können wir auf die verschiedensten Arten verfahren. So können wir z. B. diesen Schwerpunkt aus den vier gemeinsamen Punkten eines solchen Kreises mit dem Kegelschnitt direkt bestimmen. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so können wir weiter denselben durch seine Asymptoten ersetzen, auf diese Lote fällen, die Mitte der Verbindungslinie der Fusspunkte dieser Lote ist dann immer der gesuchte Schwerpunkt s. Eine weitere, sowohl für die Hyperbel als auch für die Ellipse gültige Konstruktion gründet sich auf den Umstand, dass wir durch m beliebige Geraden M ziehen

können, und dass dann die zugehörigen Geraden S sich in dem Punkte s schneiden müssen. Anstatt aus diesen Geraden zwei ganz beliebige herauszuwählen, können wir eine ganz bestimmte wählen, nämlich diejenige, die auf der Sehne des Kegelschnitts, die m zur Mitte hat senkrecht steht. Die zu dieser gehörige Gerade S ist dann die Verbindungslinie der Fusspunkte der Lote von m auf die Axen; eine zweite beliebig durch m gehende Gerade M und die zu dieser gehörige Gerade S liefert dann den Punkt s. Ist insbesondere die Gerade M und die zu ihr gehörige Gerade S gegeben, so erhalten wir aber hieraus;

Soll zu irgend einem Punkt in einer Geraden M der zugehörige Punkt s konstruiert werden, und ist zudem die zu M gehörige Gerade S gezeichnet, so brauchen wir nur die Fusspunkte der Lote von m auf die Axen mit einander zu verbinden, diese Verbindungslinie bestimmt dann immer auf S den gesuchten Punkt s. Lassen wir ferner den Punkt m die Gerade S durchlaufen, so umhüllt die Verbindungslinie der Fusspunkte auf den Axen des Kegelschnitts eine Parabel, die auch S zur Tangente hat, und die zu den Punkten m gehörigen Punkte s auf S bilden eine mit der Punktseite m projektivische und verbinden wir jeden Punkt m mit dem ihm zugehörigen Punkt s, so umhüllt diese Verbindungslinie einen Kegelschnitt K^2. Dieser Kegelschnitt hat zudem die Axen des gegebenen Kegelschnitts sowie die Geraden S und M und auch die unendlich ferne Gerade zu Tangenten, indem diese Geraden zu einzelnen Geraden m s werden. Der Kegelschnitt K^2 ist also immer eine Parabel und die Leitlinie dieser Parabel geht durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts C^2 und die Punktreihen m und s sind ähnliche Punktreihen. Ist insbesondere die Gerade M senkrecht zu einer Axe, so ist auch die Gerade S senkrecht zu derselben und die Geraden m s gehen dann alle durch einen Punkt auf dieser Axe.

5. Soll umgekehrt zu einem Punkt s der zugehörige Punkt m konstruiert werden, so kann man ebenfalls auf die verschiedenste Art verfahren: So kann man z. B. den Punkt s mit dem Mittelpunkt o des Kegelschnitts verbinden und o s über s hinaus um sich selbst bis o_1 verlängern, und durch o_1 diejenige Sehne a b des Kegelschnitts ziehen, die o_1 zur Mitte hat. Zieht man dann durch den Mittelpunkt o des Kegelschnitts diejenige Sehne

c d, die mit den Axen dieselben Winkel bildet wie a b, aber zu a b nicht parallel ist, so liegen die Endpunkte dieses Durchmessers c d mit den Endpunkten der Sehne a b auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der gesuchte Punkt m ist.

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so kann man durch den Punkt s selbst eine Sehne ziehen, die ihn zur Mitte hat und in den Schnitten derselben mit den Asymptoten auf diesen Senkrechte errichten, die sich dann in dem gesuchten Punkt m schneiden.

Eine weitere, sowohl für die Ellipse als auch für die Hyperbel giltige Konstruktion ist die folgende: Man ziehe durch s eine beliebige Gerade S und sehe diese als Ortsgerade S an. Um die zu ihr gehörige Gerade M zu erhalten, errichtet man in den Schnitten von S mit den Axen auf diesem Lote, die sich in einem Punkte m_1 treffen. Durch m_1 zieht man die Sehne des Kegelschnitts, die m_1 zur Mitte hat, das Lot in m_1 auf dieser Sehne ist dann die gesuchte Gerade M. Zieht man durch s dann noch eine zweite Gerade S, und bestimmt auch zu dieser die zugehörige Gerade M, so erhält man den zu s gehörigen Punkt m als den Schnittpunkt der beiden Geraden M. Anstatt, dass man durch s zwei beliebige Geraden S zieht, kann man auch die beiden Geraden senkrecht zu den Axen der Kegelschnitte wählen. Ist z. B. eine dieser Geraden gezogen und schneidet sie den Kegelschnitt C^2 in h und g, so werden sich die Normalen des Kegelschnitts C^2 in einem Punkte i auf einer Axe desselben treffen und eine Senkrechte in i auf dieser Axe, ist dann die zu obiger Geraden S gehörige Ortsgerade M u.s.w.

6. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so werden die obigen Resultate andere. Schneidet zunächst ein Kreis die Parabel in vier Punkten a b c d, so sind die Gegenseiten des Vierecks dieser Punkte gegen die Parabelaxe gleich geneigt. Hieraus folgt aber, dass die Mitten g und h der Seiten c d und a b dieses Vierecks auf zwei Durchmessern der Parabel gelegen sind, die von der Axe gleich weit abstehen, und dass der Schwerpunkt selbst auf die Axe fällt. Schneiden ferner die Verbindungslinien der Mitten g und h mit dem Kreismittelpunkt m die Parabelaxe in k und l, so sind diese vom Fusspunkt m_1 des Lotes von m auf die Axe gleich weit entfernt, indem auch die Verbindungslinien

gm und hm mit der Parabelaxe gleiche Winkel bilden, da sie senkrecht auf cd und ab stehen. Der Schwerpunkt der vier Punkte a b c d ist zudem der Schwerpunkt der vier Parabelpunkte $a_1 b_1 c_1 d_1$, die zu den Punkten a b c d in Bezug auf die Parabelachse symmetrisch gelegen sind; diese acht Parabelpunkte liegen aber zu je vier auf einem Kreise, nämlich $a b a_1 b_1$ liegen auf einem Kreise um l und $c d c_1 d_1$ auf einem solchen um k. Wir erhalten also den Schwerpunkt der vier Punkte auch, wenn wir die Schwerpunkte dieser beiden Gruppen von je vier Punkten $a b a_1 b_1$ und $c d c_1 d_1$ bestimmen und deren Entfernung halbieren. Liegt jedoch der Kreismittelpunkt m auf der Parabelaxe, so brauchen wir nur von diesem Punkt auf die Parabel die Normalen zu fällen, die nicht auf die Axe selbst fallen und deren Fusspunkte zu verbinden, so bestimmt die Verbindungslinie auf der Axe den zugehörigen Schwerpunkt s. Dieser ist also in diesem Falle vom Punkte m um den halben Parameter der Parabel von m entfernt, da für die Parabel die Subnormale gleich dieser Strecke ist [1]). Weil aber der Punkt m_1 die Mitte von lk ist, so ergiebt sich daraus unmittelbar, dass der Schwerpunkt s, der einem beliebigen Punkt m zugehört vom Fusspunkt m_1 des Lotes von m auf die Parabelaxe um diesen halben Parameter entfernt ist. Fassen wir diese Resultate zusammen, so erhalten wir:

„Ein Kreis bestimmt auf einer Parabel stets vier Punkte, deren Schwerpunkt auf der Parabelaxe liegt in einer Entfernung gleich dem halben Parameter der Parabel vom Fusspunkt des Lotes des Kreismittelpunktes auf die Parabelaxe und zwar in der Richtung vom Brennpunkt nach dem Scheitel der Parabel."

7. Wie wir oben sahen, waren die Punkte einer Geraden M eindeutig auf die Punkte einer Geraden S bezogen und zwar hatten die Punkte m und die Punkte s auf den beiden Geraden ähnliche Punktreihen beschrieben. Durchschneiden wir die Gerade M durch irgend eine Kurve des rten Grades, M^r, so folgt daraus, dass auch die den Punkten m dieser Kurve konjugierte Kurve der Punkte s eine Kurve des rten Grades S^r ist und umgekehrt, d. h. wir finden:

---

1) Steiner-Schröter, Kegelsch. p. 213.

„Durchläuft der Punkt m eine Kurve des r ten Grades M^r, so durchläuft auch der Punkt s eine solche Kurve des r ten Grades, S^r und umgekehrt; durchläuft der Punkt s eine solche Kurve, so ist dies auch mit dem Punkt m der Fall.“

Weiter fanden wir die Richtungen zweier Geraden M und S durch die Relation

$$\text{tang } \beta = -\frac{b_1^2}{a_1^2} \text{ tang } \alpha$$

verbunden waren. Lassen wir die Gerade M also parallel der Asymptote des Kegelschnitts werden, so finden wir

$$\text{tang } \beta_1 = -\frac{b_1^3}{a_1^3}, \text{ und}$$

lassen wir ebenso die Gerade S mit einer Asymptote parallel werden, so finden wir ebenso

$$\text{tang } \alpha_1 = -\frac{a_1}{b_1}.$$

Dies giebt uns im Verein mit dem Obigen:

„Beschreibt insbesondere der Punkt m den Kegelschnitt C^2 selbst, so ist der Ort des ihm zugehörigen Punktes s ebenfalls ein Kegelschnitt C_1^2 und zwar verhalten sich die Axen dieses Kegelschnitts zu einander wie die Kuben der Axen des gegebenen Kegelschnitts. Beschreibt dagegen der Punkt s den Kegelschnitt C^2, so durchläuft der ihm zugehörige Punkt m einen zu dem gegebenen Kegelschnitt ähnlichen C^2_2, der wie der Ortskegelschnitt C_1^2 zu dem gegebenen Kegelschnitt konzentrisch, aber gegen diesen um 90^0 gedreht ist.“

Für die Axen dieser Kegelschnitte selbst erhalten wir die Werte $\frac{a_1^3}{a_1^2-b_1^2}$, $\frac{b_1^3}{a_1^2-b_1^2}$ und $\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1}$, $\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1}$.

§ 6.

Krümmungskreise.

1. Konstruieren wir in irgend einem Punkt a eines Kegelschnitts den Krümmungskreis, so wird derselbe ausser dem Punkt a mit dem Kegelschnitt noch einen Punkt g gemein haben, und zwar ist dann die Gerade ag gegen die Axen des Kegelschnitts gleich geneigt wie die Tangente desselben im Punkte a. Der

Schwerpunkt s der vier Punkte, die dieser Krümmungskreis mit dem Kegelschnitt gemein hat, liegt dann auf a g und zwar ist a s = $\frac{1}{3}$ a g. Der Punkt s liegt aber auch auf der Verbindungslinie der Fusspunkte b und c der Lote von a auf die Kegelschnittaxen, und es ergiebt sich uns die folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts:

„Im Punkte a des Kegelschnitts ziehen wir die Normale und die Tangente. Schneidet letztere die eine Axe in k, so beschreiben wir mit a k um a einen Kreis, der diese Axe ein zweitesmal in l schneidet. Von a fällen wir auf die Axen die Lote a b und a c und verbinden deren Fusspunkte b und c und ziehen durch den Mittelpunkt o des Kegelschnitts eine Parallele zu b c, welche a l in e trifft; dann bestimmt das Lot in e auf a l stets den Mittelpunkt x des Krümmungskreises.

2. Schneiden sich zwei Normalen eines Kegelschnitts in einem Punkte x, so erhalten wir den zu diesem Punkt x als Punkt m gehörigen Punkt s dadurch, dass wir nach § 5. 3: die zu den Normalen als Gerade M gehörigen Geraden S konstruieren. Fallen beide Normalen in eine einzige zusammen, so wird der Schnittpunkt s der beiden jetzt zusammenfallenden Geraden S Berührungspunkt mit einer Parabel, der auch die Gerade S als Tangente angehört. Diese Parabel entsteht dadurch, dass wir von jedem Punkt a der Normalen auf die Axen Lote fällen und deren Fusspunkte d und e mit einander verbinden; die Verbindungslinie umhüllt dann immer eine Parabel, der auch die Gerade S angehört, die wir erhalten, wenn wir vom Fusspunkt der Normalen auf die Axen die Lote fällen und deren Fusspunkte mit einander verbinden. Die so erhaltene Parabel berührt aber auch die Axen des Kegelschnitts und zwar in den Punkten b und c, in denen sie von der Tangente des Kegelschnitts in a geschnitten werden. Wir kennen also im Dreieck o d e, das der Parabel umschrieben ist, zwei Berührungspunkte und können also den dritten Berührungspunkt wie folgt konstruieren. Wir ziehen b e und c d, welche sich in q treffen mögen, die Gerade vom Mittelpunkt o des Kegelschnitts nach q bestimmt dann den dritten Berührungspunkt s auf d e. Schneidet ferner das Lot von s auf die eine Axe den Kegelschnitt in g und ziehen wir in g zu dem Kegelschnitt die Normale und trifft

diese dieselbe Axe in h, so schneidet das Lot in h auf der gleichen Axe die Normale im Krümmungsmittelpunkt (vgl. § 5. 4).

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so erleiden die beiden Konstruktionen des Krümmungsmittelpunkts unwesentliche Abweichungen. Ist dagegen der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, so ist stets der zu einem Punkt m gehörige Punkt s die Mitte der Verbindungslinie des Punktes m mit dem Mittelpunkt der Hyperbel. Ist demnach auf eine der beiden obigen Arten des zum Mittelpunkt des Krümmungskreises gehörige Punkt s gefunden, so haben wir nur den Mittelpunkt o der Hyperbel mit dem Punkt s zu verbinden, die Verbindungslinie bestimmt dann immer auf der Normale den Krümmungsmittelpunkt.

§ 7.

Ueber gleichseitige, einem Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke.

1. Ist irgend einem Kegelschnitt C^2 ein gleichseitiges Dreieck u v w einbeschrieben und trifft der Umkreis dieses Dreiecks den Kegelschnitt noch in einem vierten Punkt y, so liegt der zum Mittelpunkt m dieses Kreises gehörige Schwerpunkt s der vier Punkte u v w y auf m y und zwar ist $ms = \frac{1}{3}sy$. Soll der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf einer Geraden gelegen sein, so haben wir demnach zur Bestimmung des Punktes s Folgendes: Einmal liegt der Punkt s auf der zu M gehörigen Ortsgeraden S und dann muss die Gerade y m durch S so geteilt werden, dass $ms : sy = 1 : 3$ ist. Wie wir aber oben sahen, ist der Ort der Geraden m s eine Parabel K^2 (§ 5. 4). Teilen wir aber die Abschnitte auf den Tangenten einer Parabel zwischen zwei festen Tangenten derselben in einem bestimmten Verhältnis, so ist der Ort des Teilpunkts eine weitere Tangente der Parabel. Sind hier die beiden festen Tangenten der Parabel K^2 die Geraden M und S, so ist also der Ort des Teilpunktes der Abschnitte der übrigen zwischen diesen, für den das Verhältnis 1 : 3 ist, eine Gerade G. Um diese zu konstruieren, können wir von den Axen des Kegelschnitts ausgehen, die ebenfalls Tangenten dieser Parabel sind. Werden die Geraden M und S von der einen Axe in den Punkten d und c, von der

andern in den Punkten k und g geschnitten, so haben wir nur die Punkte e und h so zu bestimmen, dass $ec = 3cd$ und $hg = 3gk$ wird, eh ist dann die gesuchte Gerade Y. Die Gerade G schneidet den Kegelschnitt C^2 in zwei Punkten y und y_1. Legen wir von y aus an die Parabel P^2 die zweite Tangente (etwa mittelst des Satzes des Brianchon, indem wir z. B. yl senkrecht cd und durch den Schnittpunkt l von yl mit ek die Gerade lm parallel cd ziehen, so bestimmt diese Parallele auf M den Punkt m und es ist dann ym diese zweite Parabeltangente), so erhalten wir durch sie auf M einen Mittelpunkt m eines solchen Kreises durch y, der auf dem Kegelschnitt noch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ausschneidet; und wir erhalten also:

„Soll einem beliebigen zentrischen Kegelschnitt C^2 ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben werden, so ist der Ort des Mittelpunkts dieses Dreiecks ein zweiter Kegelschnitt $C_1{}^2$, der mit dem ersten konzentrisch ist."

2. Um die Axen des Kegelschnitts $C_1{}^2$ zu bestimmen, können wir eine Ecke u des gleichzeitigen Dreiecks uvw in einen Scheitel des Kegelschnitts C fallen lassen, etwa in den der Hauptaxe.. Schneidet die Seite vw diese Axe noch in c und sind a und b die Halbaxen des Kegelschnitts und bezeichnen wir mit z die Strecke uc, so erhalten wir mittelst des Newtonschen Satzes [1]), da $cv = \frac{z}{\sqrt{3}}$ ist:

$$\frac{z^2}{3z\,(2a-z)} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ oder}$$

$$z = \frac{6a^2b}{a^2+3b^2}, \text{ und hieraus für die Halbaxen des Kegelschnitts } C_1{}^2$$

$$\begin{cases} a_1 = a - \frac{2}{3}z = \frac{a\,(a^2-b^2)}{a^2+3b^2} \text{ und} \\ b_1 = \frac{b\,(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}. \end{cases}$$

3. Ist insbesondere der Kegelschnitt C^2 eine gleichseitige

1) Salmon-Fiedler, höhere Kurven p. 128.

Hyperbel, also ist $a^2 = -b^2$, so gehen die obigen Werte für die Halbaxen des Kegelschnitts C_1^2 über in

$$a_1 = a \text{ und } b_1 = b; \text{ d. d.}$$

der Kegelschnitt KC_1^2 fällt mit dem Kegelschnitt C^2 zusammen. Da weiter der Schwerpunkt s, der irgend einem Kreismittelpunkt m zugehört, für deren Fall die Mitte des Strahles vom Mittelpunkt o der Hyperbel nach m ist, so liegt der zweite Endpunkt des Durchmessers m o, d. h. der Punkt y ebenfalls auf diesem Durchmesser und wir erhalten den von Steiner angegebenen Satz:

„Beschreiben wir um einen beliebigen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel als Mittelpunkt einen Kreis, der durch den andern Endpunkt des Durchmessers geht, der den Punkt ausschneidet, so hat dieser mit der Hyperbel noch drei Punkte gemein, welche die Ecken eines gleichseitigen, der Hyperbel einbeschriebenen Dreiecks sind“ [1]).

4, Bildet ebenso eine Asymptote des Kegelschnitts C^2 mit der Hauptaxe dieses Kegelschnitts einen Winkel von 60^0, ist also $3a^2 + b^2 = 0$, so werden die Axen des Kegelschnitts C_1^2

$$a_1 = \frac{a}{2}, \quad b_1 = \infty;$$

und der Kegelschnitt C_1^2 zerfällt somit in ein Geradenpaar, nämlich in zwei Geraden, welche der Nebenaxe der Parabel im Abstande $\frac{1}{2}a$ parallel sind. Wählen wir von diesen beiden die eine, so finden wir weiter, dass der Abstand der zu dieser Geraden gehörigen Geraden S vom Mittelpunkt $= \frac{1}{8}a$ wird. Da ferner der Halbmesser des Kreises durch die Punkte u v w y nach dem Punkte y durch die Gerade S so geteilt wird, dass $ms = \frac{1}{3}sy$, so finden wir noch dass der Punkt y auf einer Scheiteltangente der Hyperbel liegt, und da für den Fall, dass M und S auf einer Axe des Kegelschnitts senkrecht stehen, m s durch einen festen Punkt geht, der Punkt y Scheitel der Hyperbel ist. Geht der obige Kreis aber durch einen Scheitel der Hyperbel, so geht er auch durch einen Brennpunkt derselben; oder:

„Bilden in einer Hyperbel die Asymptoten mit der Hauptaxe Winkel von 60^0, so schneidet jeder Kreis der durch einen

1) Steiner, g. Werke. B. 2. p. 694.

Scheitel und den von diesem Scheitel entfernteren Brennpunkt geht die Hyperbel noch in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."

5. Ist der Kegelschnitt C^2 eine Parabel, so erleiden auch diesmal die in 1) entwickelten Betrachtungen Abweichungen. Ist wieder u v w irgend ein gleichseitiges, der Parabel einbeschriebenes Dreieck, und schneidet der Umkreis dieses Dreiecks die Parabel noch in einem vierten Punkt y, so wird m y durch die Parabelaxe im Verhältnis von 1 : 3 geteilt, indem auf m y sowohl als auch auf der Parabelaxe der zum Kreismittelpunkt m gehörige Schwerpunkt s liegen muss. Wie wir aber oben sahen, ist die Entfernung des Fusspunktes c des Lotes von m auf die Parabelaxe gleich dem halben Parameter derselben und die Entfernung des Fusspunktes a des Lotes vom Punkte y auf die Axe vom Fusspunkt c ist demnach gleich dem doppelten Parameter der Parabel und ebenso ist das Lot m c ein Drittel vom Lote y a und wir haben:

„Der Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Dreiecke, die sich einer Parabel einbeschreiben lassen ist wieder eine Parabel und zwar erhalten wir dieselbe, wenn wir alle Ordinaten der gegebenen Parabel um zwei Drittel ihrer Länge verkürzen und die so entstandene neue Parabel in der Richtung vom Scheitel nach dem Brennpunkt und den doppelten Parameter der ursprünglichen Parabel verschieben."

§ 8.

Ueber Kreise, welche einen Kegelschnitt in einem Punkte a berühren und von letzterem noch in den Endpunkten eines Durchmessers des Kreises geschnitten werden.

Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um einen Punkt a eines Kegelschnitts C^2, so geht die Sehne, welche die zweiten Schnittpunkte der Schenkel des rechten Winkels mit dem Kegelschnitt verbindet durch einen festen Punkt m auf der Normale des Kegelschnitts im Punkte a. Ziehen wir durch den Punkt m diejenige Sehne e c des Kegelschnitts die in m ihre Mitte hat, und beschreiben wir um m einen Kreis, der diese halbe Sehne zum Halbmesser hat, so berührt dieser den Kegelschnitt C^2 in a. Der Schwerpunkt der vier Punkte, die dieser

Kreis mit dem Kegelschnitt C^2 gemein hat, ist dann aber immer die Mitte der Strecke a m.

Bewegt sich der Punkt m auf einen Geraden M, so bewegt sich auch der dem Punkte m zugehörige Punkt s auf einer Geraden S, und sollen diejenigen Punkte m bestimmt werden, für welche m s noch mit dem Kegelschnitt C^2 einen solchen Punkt a gemein hat, so dass s die Mitte von m a ist, so finden wir, in ganz analoger Weise, wie in § 7. 1, 2 u. 5, dass auf M zwei solche Punkte m liegen, oder:

„Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um einen Punkt a eines Kegelschnitts C^2, so bestimmen seine Schenkel auf dem Kegelschnitt C^2 noch je zwei weitere Punkte, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt m geht, durchläuft der Punkt a den ganzen Kegelschnitt C^2, so durchläuft der Punkt m ebenfalls einen Kegelschnitt K^2. Soll ein Kreis eine Sehne des Kegelschnitts C^2 zum Durchmesser haben und den Kegelschnitt C^2 zudem noch in einem weitern Punkt a berühren, so ist der Ort des Kreismittelpunkts m derselbe Kegelschnitt K^2. Der Kegelschnitt K^2 ist ferner dem Kegelschnitt C^2 ähnlich, mit ihm konzentrisch und ähnlich gelegen und zwar sind seine Axen

$$a_1 = a \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \text{ und } b_1 = b \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

und der obige Kreisdurchmesser, der zugleich Sehne von C^2 ist, berührt also den Kegelschnitt C^2 im Punkte m [1]). Ist der Kegelschnitt C^2 insbesondere eine Parabel, so ist auch der zugehörige Ortskegelschnitt eine solche und zwar ist dieselbe der erstern kongruent; die Axen beider Parabeln fallen zusammen, aber die zweite Parabel ist gegen die erste in der Richtung vom Scheitel gegen den Brennpunkt um den Parameter verschoben."

§ 9.

Ueber grösste, einer Ellipse einbeschriebene Dreiecke.

1. Ist einer Ellipse E^2 irgend ein Dreieck x y z einbeschrieben, dessen Inhalt ein Maximum ist, so fällt sein Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt o der Ellipse zusammen, und die Tangenten

1) Von den Punkten der Kegelschnitte K^2, lassen sich die Normalen auf C^2 durch Zirkel und Lineal konstruieren.

in den Ecken des Dreiecks sind also den Gegenseiten desselben parallel [1]). Beschreiben wir um das Dreieck x y z einen Kreis, dessen Mittelpunkt m_1 sein möge, so wird derselbe den Kegelschnitt E^2 noch in einem vierten Punkt w treffen, und es wird der zu den vier Punkten w x y z gehörige Schwerpunkt s_1 dann notwendig auf o w liegen und o w so teilen, dass $o s_1 = \frac{1}{3} s_1 w$ ist. Der Ort des Punktes s_1 ist also eine Ellipse, die der gegebenen ähnlich ist, und deren Dimensionen ein Viertel der entsprechenden von E^2 sind. Ist aber der Ort von s_1 eine Ellipse, so ist auch der Ort des Punktes m_1 eine solche (§ 5. 7), und ist weiter m der Höhenschnitt des Dreiecks x y z, geht also $m m_1$ durch o und ist $m_1 o = \frac{1}{2} o m$, so ist auch der Ort des Punktes m eine Ellipse und wir erhalten:

„Der Ort der Mittelpunkte der Umkreise aller grössten, einer Ellipse einbeschriebenen Dreiecke ist eine zu der gegebenen Ellipse ähnliche und konzentrische E_1^2, und ebenso ist der Ort der Höhenschnitte aller dieser Dreiecke eine zweite solche Ellipse E_2^2, und zwar sind die Axen dieser Ellipsen E_1^2 und E_2^2 gegen die Axen von E^2 um 90° gedreht, und die Dimensionen der Ellipsen E_1^2 und E_2^2 verhalten sich wie 1 : 2."

Für die Halbaxen selbst erhalten wir die Werte

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2}{4a}, \quad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{4b} \quad \text{und}$$

$$a_2 = \frac{a^2 - b^2}{2a}, \quad b_2 = \frac{a^2 - b^2}{2a},$$

wobei a und b die Halbaxen der Ellipse E^2 sind [2]).

2. Die Seiten des Dreiecks x y z sind, wie wir sahen, den Tangenten in den Ecken dieses Dreiecks parallel, die Höhen des Dreiecks sind also zugleich Normalen der Ellipse E^2.

Sehen wir diese Normalen als Ortsgeraden M an, so müssen sich die zu diesen gehörigen Geraden S ebenfalls in einem Punkt treffen und zwar muss $s s_1$ durch den Mittelpunkt o gehen und o muss $s s_1$ in demselben Verhältnis teilen, wie $m m_1$ (§ 5). Wie wir aber oben sahen, ist s der Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel H^2 (§ 2), die durch die Fusspunkte der vier

1) Im Kreise sind es die ihm einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke; durch Projektion folgt die angezogene Eigenschaft für die Ellipse.

2) Steiner, g. W. B. 2. p. 547 u. f.

von m auf die Ellipse gefällten Normalen geht. Die Axen dieser Hyperbel sind zudem parallel zu den Axen des Kegelschnitts. Ersetzen wir die Hyperbel durch ihre Asymptoten, so finden wir, dass der Schwerpunkt s_2 der vier Normalenfusspunkte, die zu m gehören, die Mitte von o s ist. Um den vierten Fusspunkt zu erhalten, haben wir aber nur den Schwerpunkt o der drei bekannten Fusspunkte x y z mit s_2 zu verbinden, es muss dann die verlängerte $o s_2$ auf dem Kegelschnitt E^2 den vierten Fusspunkt v ergeben, es ist also $o s_2$ auch gleich $\frac{1}{4} o v$.

Hieraus erhalten wir aber:

„Legen wir durch die Ecken eines grössten Dreiecks, das einer Ellipse einbeschrieben ist, einen Kreis und ebenso durch diese Ecken und den Mittelpunkt der Ellipse eine gleichzeitige Hyperbel, so treffen die beiden Kurven die Ellipse immer noch in zwei Punkten w und v, die Endpunkte eines Durchmessers der Ellipse sind; die Normalen der Ellipse in den Ecken des Dreiecks treffen sich in einem Punkt und die vierte von diesem Punkt ausgehende Normale hat den vierten Hyperbelschnitt zum Fusspunkt“ [1]).

§ 10.

Normalenprobleme.

Schon die bisher entwickelten Eigenschaften legen die Vermutung nahe, dass dieselben sich, wenigstens unter gewissen Bedingungen, zur Konstruktion der Normalen eines Kegelschnitts von einem geg. Punkte aus werden verwerten lassen. Dem ist in der That so:

1. Ist zunächst ein Punkt auf einer Axe eines Kegelschnitts gegeben und sollen von diesem auf den Kegelschnitt die Normalen gefällt werden, so haben wir nur um den Punkt einen beliebigen Kreis zu beschreiben, der mit dem Kegelschnitt vier Punkte gemein hat. Von den sechs Mitten der sechs Seiten dieses Vierecks liegen dann immer vier auf einer Geraden senk-

1) Steiner, g. W. B. 2. p. 692. Steiner leitet daselbst weitere Eigenschaften ab, die sich grösstenteils unmittelbar aus dem Satze ergeben und sich besonders auf gleichzeitige Dreiecke beziehen. Von den Punkten der Ellipse $E_2{}^2$ können auf die Ellipse durch Kreis und Gerade Normalen gefällt werden.

recht zu der Axe, auf die der Kreismittelpunkt liegt, und diese Gerade schneidet den Kegelschnitt in den Fusspunkten der Normalen vor den Punkt auf die Ellipse.

2. Sind ebenso zwei von einem beliebigen Punkt m ausgehende Normalen ma und mb eines Centralkegelschnitts gegeben, so lassen sich die übrigen wie folgt konstruieren. Zunächst sehen wir diese Normalen ma und mb als Geraden M an (§ 5) und bestimmen die zu diesen gehörigen Geraden S, die sich in einem Punkt s treffen; es ist dann s der Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel, die durch die Fusspunkte der vier von m auf die Hyperbel gefällten Normalen geht. Ersetzen wir diese Hyperbel durch ihre Asymploten, die durch s gehen und den Axen des Kegelschnitts parallel sind, so erhalten wir als Schwerpunkt der vier Normalenfusspunkte, die zu m gehören die Mitte s_1 der Verbindungslinie des Kegelschnittmittelpunkts mit dem Punkt s. Verbinden wir die Mitte s von a b mit s_1 und verlängern diese Verbindungslinie über s_1 hinaus um sich selbst bis d und ziehen durch d die Sehne x y des Kegelschnitts, so sind x und y die Fernpunkte der weitern zwei von m ausgehenden Normalen des Kegelschnitts.

3. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so wird die obige Konstruktion hinfällig, indem die Mitte von a b auf die Gerade G_∞ fällt. Wir können aber auch für diesen Fall, wenn eine von einem Punkt m auf die Parabel gefällte Normale gegeben ist eine Konstruktion ableiten. Wir bestimmen zunächst den zum Punkt m gehörigen Punkt s. Dieser ist Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel, die durch den unendlichfernen Punkt der Parabel und die drei Fusspunkte der, von m ausgehenden Normalen der Parabel geht. Ersetzten wir die Hyperbel durch ihre Asymptoten, so bestimmen diese auf der Hyperbel ein Dreieck, das den gleichen Schwerpunkt hat, wie das Dreieck der drei Normalenfusspunkte (§ 4). Um diesen Schwerpunkt zu erhalten verfahren wir aber wie folgt. Wir fällen von m auf die Parabelaxe das Lot m c, tragen vom Fusspunkt c dieses Lotes in der Richtung vom Brennpunkt gegen den Scheitel der Parabel den halben Parameter derselben ab und erhalten dadurch den Mittelpunkt s der obigen Hyperbel. Das Stück s g der Axe zwischen s und dem Scheitel g der Parabel teilen wir in s_1 so,

dass $ss_1 = \frac{1}{2} s_1 g$ ist, so ist s_1 der Schwerpunkt des Dreiecks der Fusspunkte der drei von m ausgehenden Parabelnormalen. Verbinden wir a mit s_1 und bestimmen auf as_1 den Punkt b so, dass $as_1 = 2s_1 b$ wird, so giebt die Sehne der Parabel durch b, die in b ihre Mitte hat auf der Parabel die Fusspunkte der gerechten Normalen. Insbesondere folgt aber daraus noch:

„Schneiden sich drei Normalen einer Parabel in einem Punkt, so liegt der Schwerpunkt der drei Normalenfusspunkte auf der Parabelaxe und hat umgekehrt ein Parabeldreieck seinen Schwerpunkt auf der Axe, ergehen die Normalen der Parabel in seinen Ecken durch denselben Punkt und zwar bleibt der Schwerpunkt derselbe, wenn der gemeinsame Schnitt der Normalen auf einer Senkrechten zur Axe fortgleitet. Umgekehrt haben auch die drei zu einem Dreieck, das der Parabel einbeschrieben ist und einen festen Punkt der Axe zum Schwerpunkt hat, gehörigen Normalen in den Ecken eine Senkrechte zur Parabelaxe zum Ort ihres gemeinsamen Schnitts."

4. Aus dem zuletzt Entwickelten erhalten wir unmittelbar:

„Legen wir durch den Scheitel einer Parabel einen beliebigen Kreis, so bestimmt derselbe auf der Parabel noch drei Punkte, deren Normalen sich in einem Punkte p treffen. Bewegt sich der Mittelpunkt m des Kreises auf einer Geraden senkrecht zur Parabelaxe, so ist dies auch mit dem gemeinsamen Normalenschnitt der Fall."

Bezeichnen wir die beiden Senkrechten zur Parabelaxe mit M und P, so entspricht jedem Punkt m der Geraden ein Punkt p der Geraden P und es entsprechen sich namentlich auch die beiden Punkte auf G_∞ dieser Geraden; d. h. wir erhalten:

„Die Verbindungslinie des Normalenschnitts p mit dem Mittelpunkt m des Kreises durch die Fusspunkte der Normalen geht durch einen festen Punkt der Axe, wenn der Normalenschnitt und also auch der Kreismittelpunkt auf je einer Senkrechten zur Axe sich bewegen."

Hiemit haben wir eine Lösung des Problems von einem beliebigen Punkt auf eine Parabel die Normalen zu fällen, um unter Zuhilfnahme von Zirkel und Lineal gegeben[1]). Ist nämlich b der Schnitt von P

1) Vergl. auch hiezu Joachimsthal, Crelles Journal B. 26 p. 172;

mit der Parabelaxe, so können wir zunächst von b aus in der Richtung vom Brennpunkt nach dem Scheitel den halben Parabelparameter gleich b g abtragen. Die Senkrechte in diesem Punkt auf der Axe giebt uns dann die Fusspunkte e und d der von b auf die Parabel gefällten Normalen. Der Kreis durch d und e und den Scheitel a giebt uns weiter den Schnittpunkt m_0 der Geraden M mit der Axe und damit die Gerade M selbst. Ein beliebiger Kreis durch a dessen Mittelpunkt m auf M ist giebt uns weiter auf der Parabel drei Punkte x y z, deren Normalen sich in einem Punkt p auf der Geraden P treffen und p m schneidet dann die Axe in einem Punkte q. Ist auf P dann irgend ein Punkt gegeben, so giebt die Gerade von q nach diesen Punkt auf M den Mittelpunkt des zu dem Punkt gehörigen Kreises durch a, dessen weitern Schnitte mit der Parabel die Fusspunkte der drei, von dem letzten Punkt auf P gefällten Normalen sind.

Diese Konstruktion lässt sich jedoch noch vereinfachen. Zunächst ist, wenn wir mit π den Halbparameter der Parabel bezeichnen

$ge^2 = 2\pi \cdot ag$, und da auch, wenn c der zweite gemeinsame Schnitt der Kreise durch a auf der Axe ist,

$$ge^2 = gc \cdot ag, \text{ so folgt}$$
$$gc = 2\pi, \text{ oder } bc = \pi.$$

Schneidet ferner P die Parabel in p_1, so geht der zu diesem Punkt gehörige Kreis durch p_1 selbst und wir erhalten für diesen Mittelpunkt m_1

$$am_0 = \frac{ab + \pi}{2}, \quad bm_0 = \frac{ab - \pi}{2},$$

$$am_0^2 + m_0m_1^2 = \left(\frac{ab - \pi}{2}\right)_2 + (bp_1 - m_0m_1)^2,$$

$$\left(\frac{ab + \pi}{2}\right)^2 + m_0m_1^2 = \left(\frac{ab\pi}{2}\right)^2 + (bp_1 - m_0m_1)^2, \text{ oder:}$$

$$ab.\pi = -2m_0m_1 \cdot bp_1 + bp_1^2$$
$$= -\frac{2m_0m_1}{bp_1} \cdot bp_1^2 + bp_1^2, \text{ und da}$$
$$bp_1^2 = 2\pi \cdot ab$$
$$ab\pi = -4 \cdot ab\pi \cdot \frac{m_0m_1}{bp_1} + 2ab\pi, \text{ oder:}$$

Böcklen, Grunert's Archiv B. 30. p. 434 und Pelz, Sitzungsbericht der Wiener Akad. v. 12. Jan. 1882.

$4 m_0 m_1 = b p_1$, d. h.
es ist $m_0 m_1$ ein Viertel von $b p_1$, und wir erhalten also folgende Lösung des Normalenproblems:

„Sollen von p auf die Parabel die Normalen gefällt werden, so tragen wir vom Fernpunkt b des Lotes vom p auf die Parabelaxe in der Richtung vom Scheitel zum Brennpunkt den halben Parameter der Parabel gleich b c ab und errichten auf dem Stück der Parabelaxe zwischen c und dem Scheitel derselben das Mittellot und tragen auf demselben nach derselben Seite der Axe, auf der p liegt, ein Viertel c p ab, so erhalten wir den Mittelpunkt m eines Kreises, der durch den Scheitel der Parabel und die Fusspunkte der drei von p auf die Parabel gefällten Normalen geht."

5. Beschreiben wir wieder durch einen beliebigen Punkt t eines Centralkegelschnitts einen Kreis und lassen den Mittelpunkt des Kreises sich auf einer Geraden M_1 bewegen, während der Punkt t fest bleibt, so schneidet dieser Kreis den Kegelschnitt noch in drei Punkten x y z eines Dreieck, das einer Parabel umschrieben ist[1]). Ist ebenso eine Normale M des Kegelschnitts gezeichnet und fällen wir von einem beliebigen Punkt in dieser Normale auf den Kegelschnitt die weitern Lote, so liegen auch deren Fusspunkte $x_0 y_0 z_0$ mit dem Fusspunkt a der Normale M auf einer gleichseitigen Hyperbel H^2. Lassen wir den Punkt m sich auf der Normale bewegen, so beschreibt die Hyperbel ein Büschel, das durch den Punkt a, den Mittelpunkt o des Kegelschnitts und die unendlich fernen Punkte der Axe derselben geht. Das Dreieck $x_0 y_0 z_0$ ist also ebenfalls einer Parabel umschrieben, die zudem die Axen des Kegelschnitts C^2 berührt[1]). Ziehen wir durch den Fusspunkt a der Normale mit den Axen g h und i k des Kegelschnitts Parallelen, die den Kegelschnitt C^2 nochmals in f und e treffen und legen wir durch die Punkte g h i und ebenso durch die Punkte k i f Kreise, so schneiden sich diese noch in zwei Punkten t und t_1, von den der eine Endpunkt des Durchmessers durch a ist, also auf dem Kegelschnitt C^2 liegt. Schneiden sich aber die Normalen die Axen des Kegelschnitts in b und c, so sind die Dreiecke g e h und k i f Fusspunktedreiecks

1) Steiner-Schröter, Kegelschnitte p. 242.

$x_0 y_c z_0$ der Punkte b und c. Beschreiben wir durch t und t_1 Kreise, so bestimmen diese Kreise, wie wir sahen auf dem Kegelschnitt Dreiecke x y z, d. h. die Dreiecke g e h und k i f sind auch solche Dreiecke x y z. Den beiden obigen Parabeln, die durch die Dreiecke x y z und $x_0 y_0 z_0$ umhüllt sind, sind also gleichzeitig zwei Dreiecke x y z und $x_0 y_0 z_0$ umschrieben, sie sind also eine und dieselbe Parabel; und wir haben:

„Legen wir durch die Punkte t und t_1 einen beliebigen Kreis, so hat derselbe mit dem Kegelschnitt immer noch drei solche Punkte gemein, deren Normalen sich in einem Punkte treffen, und zwar in einem Punkte d der Normale M und fällen wir umgekehrt, von einem beliebigen Punkt der Normale auf einen Kegelschnitt die drei übrigen Normalen, so liegen deren Eusspunkte auf einem Kreis, der durch zwei feste Punkte t und t_1 geht. Und beschreiben wir insbesondere durch je drei Fusspunkte der vier Normalen, die wir von einem beliebigen Punkt auf einen Centralkegelschnitt fällen können, Kreise, so geht jeder durch den andern Endpunkt des Durchmessers durch den vierten Fusspunkt der Normalen."

Sind weiter die Punkte m_b und m_c die Mittelpunkte der Kreise durch g h e und f i k und ziehen wir die Geraden b m_b und c m_c und schneiden sich diese in einem Punkt p, so geht durch diesen Punkt p auch die Gerade, welche den Mittelpunkt m_d irgend eines der Kreise durch t und t_1 mit dem zugehörigen Normalschnitt d auf M verbindet, indem die Normalschnitte auf M eindeutig den Mittelpunkten auf M_1 zugeordnet sind und umgekehrt, und dem unendlich fernen Punkt von M auch der unendlichferne Punkt von M_1 entspricht und M noch über dies parallel M_1 ist, da für dem unendlich fernen Mittelpunkt t t_1 senkrecht zur Normale in t wird.

Bewegt sich weiter der Punkt m auf der Geraden M_1, so bewegt sich auch der zum Punkt m als Kreismittelpunkt gehörige Punkt s auf einer solchen Geraden, und da von den vier Punkten der Kreise und des Kegelschnitts einer fest ist, so finden wir, dass auch der Ort des Schwerpunkts des Dreiecks eine Gerade ist, oder:

„Fällen wir von den Punkten einer Normale eines Kegelschnitts auf denselben die weitern Normalen, so ist der Ort des

Schwerpunkts des Fusspunktendreiecks eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht.«

Das bisher Entwickelte gestattet auch für den Fall eines Centralkegelschnitts die Konstruktion der weitern drei Normalen von einem Punkt auf den Kegelschnitt, wenn eine derselben gegeben ist, mit alleiniger Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal. Ist der Punkt d einer Normale M gegeben, von der die drei andern Normalen ausgehen, so können wir zunächst durch die Kreise durch g e h und f i k die Punkte t und t_1 bestimmen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkt dieser Kreise $m_b m_c$ ist dann die Gerade M. Der Schnittpunkt p von m_b b und m_c c mit dem Punkte d verbunden giebt uns dann den Mittelpunkt m_d eines Kreises t und t_1, die durch die Fusspunkte der drei weitern von d auf den Kegelschnitt gefällten Normalen geht«.

§ 11.

Ueber Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren.

1. Sind irgend zwei Kreise P^2 und Q^2 gegeben und sind p und q deren Mittelpunkte und beschreiben wir um die Mitte m von p q einen beliebigen Kreis M^2, und hat dieser mit den Kreisen P^2 und Q^2 die Punktepaare $a a_1$ und $b b_1$ gemein, so sind die Sehnen, die die Kreise P^2 und Q^2 auf a b ausschneiden, gleich gross, die Mitte von a b liegt also auf der Chordale L beider Kreise P^2 und Q^2 und die Tangenten von a an Kreis Q^2 sind gleich den Tangenten von b an Kreis P^2. Schneidet die Chordale L die Gerade p g in s, so ist s auch der Schwerpunkt der Punkte $a a_1$ und $b b_1$. Beschreiben wir weiter einen zweiten Kreis M_1^2, so wird dieser auf Kreis P^2 zwei Punkte c und c_1 und auf Q^2 zwei Punkte d d_1 bestimmen und diese vier Punkte haben gleichfalls den Punkt s zum Schwerpunkt. Legen wir nun durch die sechs Punkte $a a_1$, $b b_1$ und $c c_1$ einen Kegelschnitt, so muss dieser notwendig auch durch die Punkte $d d_1$ gehen, denn nun so können die beiden Kreise M^2 und M_1^2 mit ihm je vier Punkte gemein haben, die denselben Punkt s zum Schwerpunkt haben und wir erhalten:

„Beschreiben wir nun die Mitte m der Centrale p q zweier

beliebiger Kreise P^2 und Q^2 zwei beliebige Kreise M^2 und $M_1{}^2$, so liegen die acht Punkte, die sie auf diesen Kreisen bestimmen, auf einem Kegelschnitt C^2, dessen Axe auf die Centrale beider Kreise fällt, und da die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise immer auf zwei solchen Kreisen M^2 und $M_1{}^2$ liegen, so geht durch dieselben also auch immer ein Kegelschnitt C^2."

Lassen wir die Kreise M^2 und $M_1{}^2$ in einen einzigen zusammenfallen, so berührt der Kreis P^2 und Q^2 den Kegelschnitt C^2 doppelt, oder:

„Berühren zwei Kreise P^2 und Q^2 einen Kegelschnitt doppelt, und liegen deren Mittelpunkte auf derselben Axe des Kegelschnitts, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kreise M^2, der die Mitte in der Centrale von p q von P^2 und Q^2 zum Mittelpunkt hat. Die Tangenten, die wir von den Berührungspunkten des Kreises Q^2 an Kreis P^2 ziehen können, sind gleich den Tangenten, die wir von den Berührungspunkten des Kreises P^2 an Q^2 ziehen können [1])."

Da ferner jeder C^2, gleichgültig ob es die Kreise P^2 und Q^2 schneidet oder doppelt berührt, mit jedem Kreis M^2 um m vier Punkte gemein haben muss, die den Punkt s zum Schwerpunkt haben, so folgt noch:

„Irgend zwei der obigen Kegelschnitte C^2 schneiden sich in vier Punkten eines Kreises M^2."

2. Ist irgend ein Kreis K^2 mit einem Kegelschnitt C^2 in doppelter Berührung und schneidet irgend eine Gerade den Kreis K^2 in den Punkten $d\,d_1$, den Kegelschnitt dagegen in den Punkten $c\,c_1$ und die Berührungssehne in g, so ist g Doppelpunkt einer Involution von Punkten, der $c\,c_1$ und $d\,d_1$ als konjugierte Punktepaare angehören, d. h. wir haben

$$(g\,d\,c\,c_1) \text{ proj. } (g\,d_1\,c_1\,c), \text{ oder}$$

$$\frac{gc}{gc_1} : \frac{dc}{dc_1} = \frac{gc_1}{gc} : \frac{d_1c}{d_1c_1}, \text{ also: } \frac{gc^2}{gc_1{}^2} = \frac{dc \,.\, dc_1}{dc_1 \,.\, d_1c_1}.$$

Bezeichnen wir demnach die Tangenten [2]), die wir von c

1) Steiner, G. W., B. 2 p. 453 f., woselbst noch einige weitere Folgerungen aus diesem Satze gezogen sind, die sich aus ihm unmittelbar ergeben.

2) Resp. die kürzeste halbe Sehne des Kreises K^2 durch den Punkt.

und c_1 an den Kreis K^2 ziehen können mit t und t_1, die Lote von diesen Punkten auf die Berührungssehne mit r und r_1, so erhalten wir:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{t}{t_1}, \text{ oder } \frac{r}{t} = \text{konst.; also:}$$

„Ziehen wir von einem beliebigen Punkt eines Kegelschnitts an einen doppelt berührenden Kreis desselben die Tangenten, so ist die Länge der Tangente gleich dem mit einem bestimmten Faktor ε multiplizierten Abstand des Punktes von der Berührungssehne."

Berücksichtigen wir das am Schlusse von 1) gefundene Resultat und den Umstand, dass wir diese feste Grösse ε durch die Kreise über den Axen bestimmen können, und dass auch die Brennpunkte des Kegelschnitts als doppelt berührende Kreise desselben aufzufassen sind; so erhalten wir weiter:

„Diese konstante Grösse ε ist dieselbe für alle doppelt berührenden Kreise des Kegelschnitts, deren Mittelpunkte auf derselben Axe liegen und zwar ist sie für die Kreise, deren Mittelpunkte auf der Hauptaxe liegen, gleich dem Wert des Brennstrahls nach dem Punkt, dividiert durch die Entfernung desselben von der zum Brennstrahl gehörigen Leitlinie des Kegelschnitts, also wenn die Halbaxen desselben a und b sind, ist dieser Wert $= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a}$, und ebenso ist dieser Wert für die Kreise, die den Kegelschnitt doppelt berühren und ihren Mittelpunkt auf der Nebenaxe haben, gleich $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, und insbesondere ist dieser Wert für die Parabel $= 1$ [1]).

3. Ist aber ein beliebiger doppelt berührende Kreis K^2 des

1) Es sind nur Folgerungen zu diesem Satz, wenn wir z. B. schliessen:

„A. Zieht man von zwei festen Punkten eines Kegelschnitts an einen doppelt berührenden, veränderlichen Kreis desselben, dessen Mittelpunkt auf der einen Axe des Kegelschnitts sich bewegt, die Tangenten, so ist die Summe oder der Unterschied dieser Tangenten konstant.

B. Ziehen wir ebenso von einem beliebigen Punkt eines Kegelschnitts an zwei feste, den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise die Tangenten, so ist deren Summe oder Unterschied konstant."

Letzteren Satz gab bereits Steiner (B. 2 d. Werke, p. 447).

Kegelschnitts C^2 gegeben und beschreiben wir um einen beliebigen festen Punkt als Mittelpunkt Kreise, so haben die vier Punkte, die ein solcher Kreis mit dem Kegelschnitt gemein hat, einen festen Punkt zum Schwerpunkt, d. h. die Summe der Entfernungen dieser Punkte von einer festen Geraden, also auch von der Berührungssehne des doppelt berührenden Kreises und des Kegelschnitts C^2 ist konstant. Diese letztere Summe ändert sich aber nicht, wenn wir den Mittelpunkt des veränderlichen Kreises sich auf einer Parallelen zur Berührungssehne sich bewegen lassen, indem zu dieser als Geraden M eine parallele Gerade S gehört; oder:

„Berührt ein Kreis K^2 einen Kegelschnitt C^2 doppelt und beschreiben wir um einen beliebigen Punkt einer Parallelen zur Berührungssehne mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, so ist die Summe der Tangenten von den gemeinsamen Punkten diesss veränderlichen Kreises mit dem Kegelschnitt an den doppelt berührenden Kreis konstant."

Und da die Brennpunkte des Kegelschnitts selbst als solche doppelt berührende Kreise anzusehen sind:

„Beschreiben wir um einen beliebigen Punkt einer Senkrechten zur Hauptaxe eines Kegelschnitts mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, so hat derselbe mit dem Kegelschnitt vier Punkte gemein und die Summe der Brennstrahlen von einem Brennpunkt nach diesen Punkten ist konstant.

Speziell für die Parabel folgt:

„Beschreiben wir um einen beliebigen Punkt mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, so ist die Summe der vier vom Brennpunkt nach den gemeinsamen Punkten des Kreises gezogenen Brennstrahlen konstant, nämlich gleich dem vierfachen Abstand des Brennpunkts vom Fusspunkt des Lotes vom Kreismittelpunkt auf die Parabelaxe."

Es ist jedoch hiebei auf das Vorzeichen dieser Brennstrahlen und Kreistangenten zu achten, indem für Punkte des Kegelschnitts auf verschiedenen Seiten der Leitlinie, resp. der Berührungssehne, dieses Vorzeichen verschieden ist.

Anmerkung.

Alle hier gegebenen Anwendungen des Satzes über den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kreises und eines Kegelschnitts lassen eine allgemeine Fassung zu, wenn wir das Büschel konzentrischer Kreise durch ein Büschel von Kegelschnitten ersetzen, das feste Asymptoten hat; es dürfte jedoch genügen darauf hinzuweisen.

II. Teil.

Ueber den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte zweier algebraischer Kurven von höherer Ordnung.

§ 12.

Ueber den Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kegelschnitts und einer Kurve des dritten Grades.

1. Drei beliebige Geraden L und zwei Punkte a und b bestimmen stets ein Büschel von Kurven des dritten Grades, die die Geraden L zu gemeinsamen Asymptoten haben und die alle durch die Punkte a und b gehen und zwar gehen die Kurven C^3 ausserdem noch durch einen weiteren festen Punkt auf der Geraden a b. Legen wir durch a und b einen festen Kegelschnitt C^2, so bestimmt jede der Kurven C^3 auf diesem noch vier weitere Punkte p und der Ort der Seiten des Vierecks dieser Punkte p ist eine Kurve der dritten Klasse P^3, indem durch jeden Punkt des Kegelschnitts C^2 eine einzige Kurve des Büschels geht und von jedem Punkt des Kegelschnitts C^2 also auch drei solche Seiten ausgehen. Unter den obigen Kurven C^3 ist aber immer auch eine solche, die in die doppelt zu zählende Gerade G_∞ und die Gerade a b zerfällt. Von den sechs Seiten des Vierecks der zugehörigen Punkte p kommen dann vier auf G_∞ zu liegen, während zwei weitere zu Asymptoten des Kegelschnitts C^2 werden. Die Kurve P^3 hat also die unendlich ferne Gerade G_∞ zur Doppeltangente und die Asymptoten des Kegelschnitts C^2 zu einfachen Tangenten.

2. Liegt weiter die Mitte einer Sehne d e eines Kegelschnitts C^2 auf einer Geraden G, so ist der Ort der Sehne eine Parabel P^2, die ebenfalls die Asymptoten von C^2 berührt. Ausser der Geraden G_∞ und den beiden Asymptoten des Kegel-

schnitts C^2 haben diese beiden Kurven P^2 und P^3 noch weitere zwei Tangenten gemein, die dann zugleich Seiten von obigen Vierecken sind und Sehnen von C^2, deren Mitten auf der Geraden G liegen, oder:

„Jede Kurve C^3 des obigen Büschels bestimmt auf dem Kegelschnitt C^2 vier Punkte p und der Ort der Mitten der Seiten des Vierecks dieser Punkte p ist ein Kegelschnitt K^2. Da der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts zugleich Schwerpunkt der Ecken jedes einzelnen dieser Vierecke ist, so haben die vier Punkte, die eine C^3 noch ausser a b auf C^2 bestimmt, einen festen Punkt zum Schwerpunkt, und ebenso haben auch alle sechs Punkte (a b und 4 p), die zugleich auf irgend einer der obigen C^3 und dem Kegelschnitt C^2 gelegen sind, einen festen Punkt zum Schwerpunkt."

3. Gehört weiter eine Kurve C_1^3, welche die Geraden L zu Asymptoten hat, dem obigen Büschel nicht an, und hat dieselbe mit dem Kegelschnitt C^2 irgend zwei Punkte r und t gemein, so können wir unter den obigen Kurven C^3 diejenige wählen, welche durch den Punkt r geht und die also mit C^2 die Punkte a, b, r und noch drei Punkte p gemein hat, die einen Punkt s zum Schwerpunkt haben. Ersetzen wir aber das Bündel von Kurven C^3 durch ein neues, das die Geraden L zu gemeinsamen Asymptoten seiner Kurven hat und dessen Kurven alle durch a und r gehen, so bestimmen diese Kurven auf C^2 Gruppen von sechs Punkten, die ebenfalls einen festen Schwerpunkt haben, und da eine Gruppe von solchen sechs Punkten sowohl dem ursprünglichen Büschel als auch dem neuen angehört, so folgt, dass beide Gruppen von sechs Punkten denselben Punkt s zum Schwerpunkt haben. Dieses neue Büschel ersetzen wir wieder durch ein drittes, das die Punkte r und t enthält, und das wieder auf C^2 solche Gruppen von sechs Punkten ausscheidet, die ebenfalls s zum Schwerpunkt haben, und da diesem Büschel die Kurve C_1^3 angehört, hat also die obige C_1^3 mit C^2 ebenfalls sechs Punkte gemein, die den Punkt s zum Schwerpunkt haben, oder:

„Der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kegelschnitts C^2 und einer Kurve C^3 bleibt derselbe, wenn wir die Kurve C^3 durch eine andere ersetzen, die mit C^3 die Asymptoten

gemein hat, und da die gemeinsamen Asymptoten dieser Kurven C^3 selbst als eine solche Kurve aufgefasst werden können, so können wir also auch die Kurve C durch deren Asymptoten ersetzen, ohne dass der Schwerpunkt dieser gemeinsamen Punkte sich ändert."

Ist aber letzteres der Fall, so dürfen wir auch den Kegelschnitt selbst durch seine Asymptoten ersetzen, indem jedem Kegelschnitt auf einer Geraden eine Sehne ausschneidet, die dieselbe Mitte hat wie das Stück der Geraden zwischen den Asymptoten des Kegelschnitts, oder:

„Der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kegelschnitts und einer Kurve des dritten Grades bleibt derselbe, wenn wir die eine oder beide der Kurven durch einen Asymptoten ersetzen, und dieser Schwerpunkt ändert sich also nicht, wenn wir die Kurven beliebig ändern, ihre Asymtoten aber beibehalten.

Anmerkung.

Diese Betrachtungen lassen sich beinahe wörtlich auf die Schnitte eines Kegelschnitts und einer beliebigen Kurve des n ten Grades mit festen Asymptoten ausdehnen, die zunächst durch $2n-4$ feste Punkte des Kegelschnitts nur hinreichend viele feste Punkte ausserhalb desselben geht, so dass wir finden:

„Irgend eine Kurve des n ten Grades und ein Kegelschnitt haben $2n$ Punkte gemein, die einen festen Schwerpunkt haben, wenn die Kurven sich ändern, ihre Asymptoten aber fest bleiben."

Diese Art der Beweisführung versagt aber für den Fall, dass die beiden Kurven von beliebigem Grade sind; es ist dann ein anderer Weg einzuschlagen, wie dies im folgenden Paragraphen geschehen soll.

§ 13.

Ueber den Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven von beliebiger Ordnung.

1. Sind die Gleichungen zweier Kurven des m ten und n ten Grades, gegeben durch

$$
\begin{aligned}
C^m &= a_0 x^m \\
&+ (b_0 + a_1 y) x^{m-1} \\
&+ (c_0 + b_1 y + a_2 y^2) x^{m-2} \\
&+ (d_0 + c_1 y + b_2 y^2 + a_3 y^3) x^{m-3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots = 0 \text{ und} \\
C^n &= a_0' x^n \\
&+ b_0' + a_1' y) x^{n-1}, \\
&+ c^{0\prime} + b_1' y + a_2 y^2) x^{n-2} \\
&+ \ldots\ldots\ldots = 0,
\end{aligned}
$$

so erhalten wir durch Elimination vom x die Gleichung:

$$
0 = \begin{vmatrix}
a_0 & b_0 + a_1 y & c_0 + b_1 y + a_2 y^2 & d_0 + c_1 y + b_2 y^2 + a_3 y^3 & \\
0 & a_0 & b_0 + a_1 y & c_0 + b_1 + b_2 y^2 & \\
0 & 0 & a_0 & b_0 + a_1 y & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0' & b_0' + a_1' y & c_0 + b_1 y + a_2 y^2 & \ldots\ldots\ldots & \\
0 & a'_0 & b'_0 + a_1 y & \ldots\ldots\ldots & \\
0 & 0 & a_0 & \ldots\ldots\ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots &
\end{vmatrix}
$$

Wählen wir irgend ein Element dieser Determinante, etwa das Element $(d_0 + c_1 y + b_2 y^2 + a_3 y^3)$ einer der ersten Gruppe von Horizontalreihen, so gehört zu demselben eine Unterdeterminante, Δ, als Summand des durch die Determinante dargestellten Ausdrucks

$$(d_0 + c_1 y + b_2 y^2 + a_3 y^3). \Delta.$$

Entwickeln wir dieses Punkt, so wird dasselbe die Form

$$P_0 y^q + P_1 y^{q-1} + P_2 y^{q-2} + \ldots\ldots$$

annehmen. Es ist aber klar, dass, gleichgültig welchen Wert q in dem einzelnen Fall hat, die Koefficienten P_0 und P_1 der obigen Funktion nur von den Werten b_2 und a_3 abhängen werden, oder dass wir, wenn es sich nur um Bestimmung der beiden Koefficienten A_0 und A_1 der entwickelten obigen Determinante

$$A_0 y^{m \cdot n} + A_1 y^{m \cdot n-1} + A_2 y^{m \cdot n-2} \ldots\ldots = 0$$

handelt, wir in dem Glied $d_0 + c_1 y + b_2 y + b_2 y^2 + a_3 y^3$ die beiden Glieder d_0 und $c_1 y$ unterdrücken können. Und da was für ein beliebig gewähltes Glied dieser Determinante gültig ist auch für alle übrigen gilt, so kann man sagen:

„Sollen nur die Koefficienten der Potenzen y^{mn} und y^{mn-1} der obigen Determinante bestimmt werden, so können wir alle Koefficienten c, d, e ..., c', d', e', gleich Null setzen oder die Koefficienten von y^{mn} und y^{mn-1} der durch die Determinante dargestellten Gleichung, des m n ten Grades für y sind nur abhängig von den Koefficienten a b und a', b' der beiden gegebenen Kurvengleichungen [1]).

2) Sind ferner

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ L_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots = 0 \\ L_m &= \alpha_m x + \beta_m y + \gamma_m = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der Asymptoten der Kurve C^m, so lässt sich deren Gleichuug stets darstellen durch

$$L_1 L_2 L_2 \ldots L_m + \varphi(x y)_{m-2} = 0,$$

wo $\varphi(xy)_{m-2}$) irgend eine Funktion des (m—2)ten Grades von (x, y) ist. Unser oben gefundenes Resultat sagt aber nichts anderes aus, als dass die Koefficienten A_0 und A_1 sich nicht ändern, wenn die Funktion $\varphi(xy)_{m-2}$ noch willkürlich verändert wird. Ist aber η die Ordinate des Schwerpunkts der gemeinsamen Punkte der beiden Kurven, so ist

$$Y = -\frac{1}{m.n}\frac{A_1}{A_0}, \text{ oder wir erhalten:}$$

„Haben zwei beliebige Kurven des m ten und des n ten Grades C^m und C^n feste Asymptoten, so bleibt der Schwerpunkt der gemeinsamen Schnitte derselben fest, wenn die Kurven sich selbst so ändern, dass ihre Asymptoten dieselben bleiben und zwar ist er der Schwerpunkt der Schnittpunkte der Asymptoten."

Anwendungen.

§ 14. Ueber den Schwerpunkt der Berührungspunkte paralleler Tangenten einer Kurve.

1. Bilden wir aus irgend zwei Gleichungen des n ten Grades

1) Ganz ebenso ist der Koeffizient A_2 nur von den Koeffizienten a, b, c und a' b' c' abhängig u. s. w. Es lassen sich auf diesem Wege die Koeffizienten der Grössen $y^{m\,n}$, $y^{m\,n-1}$, $y^{m\,n-2}$ u. s. w. selbst als Summen von Determinanten entwickeln.

$$f(x) = a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots = 0 \text{ und}$$
$$f(x) = a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots = 0$$

eine neue Gleichung $f(x) + \lambda f_1(x) = 0$, so können wir λ stets auf eine einzige Art so wählen, dass $b + \lambda b_1 = 0$ wird, wenn nicht $b = b_1 = 0$ ist. In letzterem Falle ist $b + \lambda b_1$, immer gleich Null, λ möge einen Wert haben, welchen es wolle.

Daraus schliessen wir:

„Unter den Kurven eines Büschels durch n^2 Grundpunkte giebt es im allgemeinen nur eine einzige die auf einer festen Geraden n solche Punkte ausschneidet, dass dieselben einen gegebenen Punkt derselben zum Schwerpunkt s haben [1]), giebt es dagegen zwei solche Kurven, so hat jede Kurve des Büschels mit der Geraden n Punkte gemein, die s zum Schwerpunkt haben. Unter den Knrven ist dann weiter immer eine, welche die Gerade zur Asymptote hat, indem nur dann die n Schnitte dieser Kurve mit der Geraden einen Schwerpunkt haben können, der mit einem endlichen Punkt s zusammenfällt. Umgekehrt bestimmen alle Kurven eines Büschels auf jeder Asymptote einer einzelnen Kurve desselben Punkte, die einen festen Schwerpunkt haben« [2]).

2. Wählen wir auf einer Kurve des n ten Grades C^n einen beliebigen Punkt p, so berührt die zu ihm gehörige erste Polare A^{n-1} die Basis in diesem Punkt. Fällt der Punkt p zu dem auf die Gerade G_∞, so hat also die Polare A^{n-1} desselben eine Asymptote der Basis C^n ebenfalls zur Asymptote. Die Polaren der A^{n-7} der Pole auf G_∞ bilden aber alle ein Büschel und wir haben demnach:

„Die ersten Polaren aller Pole auf der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Basis C^n bestimmen auf jeder Asymtote der Basis Gruppen von je $(n-1)$ Punkten, die einen festen Punkt zum Schwerpunkt haben, und diese ersten Polaren selbst haben somit mit der Basis immer $n(n-1)$ solche Punkte gemein, die einen festen Punkt s zum Schwerpunkt haben, und ziehen wir also an irgend eine Basis parallele Tangenten, so haben die Berührungspunkte derselben einen festen Punkt zum Schwerpunkt“ [3]).

1) Den Punkt, der dem Werte x=o entspricht.

2) Zu den gleichen Resultaten wären wir mittelst der Durchmesser einer Basis gekommen.

3) Chasles a. a. O.

3) Ziehen wir an die Kegelschnitte eines Büschels in ihren Schnittpunkten mit einer Geraden G die Tangenten, so ist der Ort dieser Tangenten eine Kurve der dritten Klasse G^3 mit G als Doppeltangente. Durch jeden Punkt auf G geht nämlich eine einzige solche Tangente t, die von G verschieden ist, während t zweimal auf die Gerade G fällt, nämlich für diejenigen Kegelschnitte des Büschels, welche die Gerade G berühren. Sind nur irgend zwei Tangenten t gegeben, und wird die eine dieser Geraden von einzelnen Kegelschnitten des Büschels in a und a_1, die andere in b und b_1 berührt, so kann jede der vier Verbindungslinien ab, ab_1, a_1b oder a_1b_1 zur Geraden G werden, und es gehören also zu dem Büschel und den beiden Geraden t vier Ortskurven G^3. Jeder dieser Ortskurven berührt die sechs Verbindungslinien der vier Grundpunkte des Büschels, sowie die Geraden t, d. h. die vier Kurven G^3 haben alle noch eine neueste Tangente gemein. Von den zwei Berührungspunkten einzelner Kegelschnitte des Büschels muss aber einer auf jeder der vier Geraden liegen; die neunte gemeinsame Tangente der vier Kurven G^3 ist aber notwendig die Gerade, welche den Schnittpunkt c von ab und a_1b_1 mit dem Schnittpunkt c_1 von a_1b und ab_1 verbindet, und zwar wird cc_1 in den Punkten c und c_1 von Kegelschnitten des Büschels berührt.

Schneiden sich die Geraden aa_1, bb_1 und cc_1 in den Punkten x, y und z, so sind diese Punkte aber paarweise durch die Punktepaare aa_1, bb_1 und cc_1 harmonisch getrennt. Da die Kegelschnitte des Büschels aber auf den Geraden aa_1, bb_1 und cc_1 Involutionen mit den Punkten aa_1, bb_1 und cc_1 als Doppelpunkten bestimmen, so folgt daraus unmittelbar, dass dem Dreieck xyz dieser drei Geraden immer ein Kegelschnitt des Büschels umschrieben ist. Fällt die Gerade ab ins Unendliche, so finden wir also:

Unter den Polaren K^2 für Pole auf der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Basis C^3 ist immer eine dem Dreieck der Asymptoten umschrieben und je eine derselben berührt eine Seite des Asymptotendreiecks in ihrer Mitte."

„Der gemeinsame Schwerpunkt der sechs Berührungspunkte paralleler Tangenten der Basis ist also der Schwerpunkt der drei Schnittpunkte der Asymptoten der Basis. Und legen wir

überhaupt durch diese drei Asymptotenschnitte einen beliebigen Kegelschnitt, so hat dieser mit der Basis sechs Punkte gemein, die ebenfalls den Schwerpunkt des Asymptotendreiecks zum Schwerpunkt haben.

„Analoge Beziehungen gelten für Kurven des n ten Grades und ihre ersten Polaren für Pole auf G_∞."

§ 15. Ueber innere Polaren.

Drehen wir irgend eine Basis des dritten Grades C^3 um einen Punkt p um einen Winkel von 180^0, so hat die neue Lage der Basis mit der alten neun Punkte gemein, von denen drei auf die unendlich ferne Gerade fallen. Die übrigen sechs Schnittpunkte beider Kurven liegen dann notwendig auf einem Kegelschnitt K^2 und zwar sind sie die Endpunkte von drei Sehnen der Kurve C^3, die ihre Mitte in p haben. Den Kegelschnitt K^2 hat Steiner die innere Polare des Pols p genannt. Aus diesem und unserm in § 12 entwickelten Eigenschaften finden wir aber:

„Durch jeden Punkt p gehen drei Sehnen der Basis C^3, die p zur Mitte haben; die Endpunkte dieser Sehnen liegen auf einem Kegelschnitt K^2, der innern Polare des Punktes p in Bezug auf die Basis C^3. Ersetzen wir diese innere Polare durch einen zu ihr ähnlichen, konzentrischen und ähnlich liegenden Kegelschnitt K_1^2, so hat derselbe mit der Basis immer sechs Punkte gemein, die den Punkt p zum Schwerpunkt haben und insbesondere haben auch die sechs Punkte, welche die Asymptoten des Kegelschnitts K^2 mit der Basis gemein haben, den Punkt p zum Schwerpunkt haben, oder vielmehr jede dieser Asymptoten hat mit der Basis drei Punkte gemein, die den Punkt p zum Schwerpunkt haben. Die Polare K^2 und die erste Polare A^2 von p in Bezug auf die Basis bestimmen also auf die unendlich fernen Geraden dieselben Punkte, oder die beiden Polaren haben parallele Asymptoten. Aendert sich weiter die Basis beliebig, behält aber ihre Asymptoten bei, so behalten auch die innern Polaren von P^2 ihre Asymptoten bei und jede der Kurven C^3 hat mit einer dieser innern Polaren sechs Punkte gemein, die p zum Schwerpunkt haben."

Auch diese Beziehungen lassen sich auf Kurven des n ten Grades ausdehnen.